中国运载火箭技术研究院

2020年博士研究生入学考试

高等数学　试题

（本试题答案必须全部写在答题纸上，写在试题及草稿纸上无效）

（本试题共 4 页，共三题，总分 100 分）

一．单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

在下列每个小题所列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的，请将其代码（字母）填写在答题纸上。错选、多选或未选均无分。

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n+4^n+5^n}=$（　　）。

   (A) 2　　(B) 3　　(C) 4　　(D) 5

2. 设圆的半径以 2 厘米/秒的速率增加，则该圆在半径为 5 厘米时，面积的变化速度为(　　)厘米/秒。

   (A) 10π；　(B) 20π；　(C) 25π；　(D) 50π

3. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n}{n}x^n$ 的收敛域是(　　)。

   (A) $(-3,3)$　　(B) $[-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$　　(C) $[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$　　(D) $(-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$

4. 设 A,B 都是 n 阶正定矩阵，则下列矩阵正定的是（　）。

   (A) $A+B$；　　(B) ABA

   (C) AB；　　(D) A^2+I（I 表示单位矩阵）。

5. 假设总体 X 服从均值为 μ，方差为 σ^2 的正态分布，记作 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，

   $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>1)$ 是取自 X 一个简单样本，令 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，则下列式子中正确的是(　　)

   (A) $\overline{X}\sim N(\frac{\mu}{n},\frac{\sigma^2}{n})$；　　(B) $\overline{X}\sim N(\frac{\mu}{n},\sigma^2)$；

(C) $\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$；　　　　(D) $\overline{X} \sim N(n\mu, n\sigma^2)$。

二．填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

请将每小题的空格中的正确答案写在答题纸上。错填、不填均无分。

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x-\tan x} =$ （　　）。

2. 设矩阵 A 满足 $A^2+2A-3I=0$，I 为单位矩阵，则 A 的特征值只能是（　　）。

3. 已知 $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$，则矩阵 $X =$ （　　）。

4. 设欧氏空间 R^3 中的向量 $\vec{a} = [1,1,-4]^T$，$\vec{b} = [1,-2,2]^T$，则 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影为（　　　）。

5. 设离散随机变量 X 的概率分布为

x	1	2	3
$P(X=x)$	0.40	0.35	0.25

则 X 的方差为（　　）。

三．解答题（本大题共 10 小题，每小题 7 分，共 70 分）

请将解答写在答题纸上，解答应写出文字说明，证明过程或演算过程。

1. 设曲线 $y = 3x^2 \ln\left(\dfrac{x}{6}\right)$

（1） 求它在与 x 轴的交点处的切线方程；

（2） 求最小值点的坐标。

2. 设 $y = f(x) = x(x-p)(x-q)(r-x)$，其中 $0<p<q<r$，满足

$$\int_0^r f(x)dx = 0, \int_0^q f(x)dx = -2, \int_p^r f(x)dx = -3$$

求曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴围成的图形的面积。

3. 在 R^3 中，求点 $(1,0,-2)$ 到平面 $x+2y+z=4$ 的最短距离。

4. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}3 & 3\\ 1 & 5\end{bmatrix}$，试求矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=D$，其中 D 为对角矩阵。

5. 设 $\left\{\vec{\alpha}_1=[0,0,1]^T,\vec{\alpha}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}[1,-1,0]^T,\vec{\alpha}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}[1,1,0]^T\right\}$ 是 R^3 中向量组

（1）证明它们是标准正交向量组；

（2）求 k_1,k_2,k_3 使得 $\vec{\alpha}=[1,2,4]^T=k_1\vec{\alpha}_1+k_2\vec{\alpha}_2+k_3\vec{\alpha}_3$；

（3）证明：$\|\vec{\alpha}\|^2=k_1^2+k_2^2+k_3^2$。

6. 泰波那契数列 $\{T_n\}$（n 为正整数）定义为

$$\begin{cases} T_0=T_1=0,T_2=1 \\ T_{n+3}=T_{n+2}+T_{n+1}+T_n(n\geq 0) \end{cases}$$

（1） 求矩阵 A 满足 $\begin{bmatrix}T_{n+3}\\ T_{n+2}\\ T_{n+1}\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}T_{n+2}\\ T_{n+1}\\ T_n\end{bmatrix}$；

（2） 求矩阵 A 的秩及特征多项式。

7. 设随机变量 T 服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的指数分布，其概率密度函数为

$$f(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t} & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

证明： 指数分布具有无记忆性，即：对任意的 $s>0,t>0$，有

$P(T>s+t\,|\,T>s)=P(T>t)$。其中 $P(X\,|\,Y)$ 表示在事件 Y 发生条件下，事件

X 发生的条件概率。

8. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x(1+3y^2)}{4}, & 0\leq x\leq 2,\ 0\leq y\leq 1\\ 0 & 其它\end{cases}$$

(1) 求概率 $P(X\leq 1,Y\leq \frac{1}{2})$；

(2) 求随机变量 X 和 Y 的边缘密度函数。

9. 假设总体X的均值为μ，方差为σ^2，$X_1,X_2,\cdots,X_n(n>1)$是取自总体X的简单随机样本，

（1）证明：$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$是$\mu$的无偏估计，$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$是$\sigma^2$的无偏估计。

（2）求用估计量$\tilde{S}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$估计$\sigma^2$的偏度。

10. 假设总体X服从二项分布$b(10,p)$， $x_1=3,x_2=4,x_3=8$是来自总体X 的样本的值，试求参数p的矩估计值和最大似然估计值。